

内啮合摆线转子压缩机型线连续性条件研究

冯诗愚¹, 高秀峰¹, 刘卫华², 李云¹, 顾兆林³

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 南京航空航天大学航空宇航学院, 210016, 南京;
3. 西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了得到内啮合摆线转子压缩机结构参数对内转子型线连续性影响的关系, 首先采用显式参数方程建立了内外转子型线方程, 分析了能够构成型线的最基本条件. 考虑到内转子型线方程的复杂性, 根据 Frenet 定义, 通过推导短幅外摆线曲率和曲率半径的方式, 间接地得到了内转子各点的曲率和曲率半径, 分析了型线上曲率半径的极值点, 将其分为 3 种不同情况进行讨论, 最终得到了内转子型线无过切的判定依据. 根据给定的内外转子齿数、基圆半径和齿顶圆半径等基本结构参数, 通过所得到的判定依据, 可直接显式计算出合理的偏心矩范围. 所研究的结果和文献上已有研究结果基本一致, 但研究过程的几何意义更加明确, 得到的结论涵盖了已有文献尚未包括的情况, 可为内啮合摆线式流体机械的设计提供一定的理论参考.

关键词: 型线; 过切; 转子; 摆线; 压缩机

中图分类号: TH45 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)01-0034-04

Continuity Condition of Profiles for Internal-Meshing Cycloid Rotary Compressor

FENG Shiyu¹, GAO Xiufeng¹, LIU Weihua², LI Yun¹, GU Zhaolin³

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 3. School of Human Settlement and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to obtain the relationship between structure parameters of internal-meshing cycloid rotary compressors and the continuity of the inner rotor profiles, explicit parametric equations of the inner and outer rotors' profiles were established and the essential condition to build up profiles was analyzed. Due to the complexity of the inner rotors profiles, in accordance with Frenet law, the curvature and the curvature radius on the profile of the inner rotor were obtained by the derivation of the curvature and the curvature radius on the curtate epicycloid. Limit points of the curvature radius on the profile of the inner rotor were discussed in three different conditions. In addition, the non-undercutting criteria were achieved which could be used to explicitly calculate the reasonable range of the eccentricity based on the given teeth number, radius of base circle, and radius of addendum circle. The results agree with the data in literature, however, this approach has more clear geometric significance.

Keywords: profile; undercutting; rotor; cycloid; compressor

内啮合摆线机构参数选择不合适, 转子型线会出现交叉现象, 当采用铣销等方式加工转子型线时, 就会造成转子局部不连续, 即产生“过切”现象. Mimm 等人^[1]对此进行了一定研究, 但推导过程繁

琐,得到的结果为隐式表达,须借助数值方法求解。Ye^[2]基于共轭型线啮合理论,以外转子圆弧齿圆心为跟踪对象,巧妙地得到了内转子型线曲率的简单表示方法,得到了内转子型线连续性条件,但该方法仍采用外转子来获取内转子型线方程,推导曲率的过程不直观。

本文根据文献[3]的研究结果,给出以发生角作为内转子型线的独立参数的参数方程,并根据外转子型线的特点,给出分段描述的外转子型线方程,然后采用一种较为简单的内转子型线曲率半径计算方法,并根据型线连续性要求,对型线无过切的限制条件进行了研究。

1 型线的数学描述和构成的基本条件

1.1 内转子型线参数方程

根据文献[3]可知,内转子型线为短幅外摆线的内等距线,如果等距距离为 a ,则内转子参数方程为

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos t + e \cos(Z_2 t) - \frac{a[R \cos t + e Z_2 \cos(Z_2 t)]}{[R^2 + 2eZ_2 R \cos(t - Z_2 t) + e^2 Z_2^2]^{\frac{1}{2}}} \\ R \sin t + e \sin(Z_2 t) - \frac{a[R \sin t + e Z_2 \sin(Z_2 t)]}{[R^2 + 2eZ_2 R \cos(t - Z_2 t) + e^2 Z_2^2]^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: t 为摆线发生角,取值范围为 $t \in [0, 2\pi]$; Z_1 和 Z_2 为内转子齿数, $Z_2 = Z_1 + 1$; R 为发生圆圆心到原点的距离。

1.2 外转子型线参数方程

外转子型线由 Z_2 段齿顶圆弧和齿根圆弧组成,外转子中心距坐标原点的距离即偏心距为 e 。齿顶圆的圆心位于半径为 R 的圆上,其半径为 a 。齿根圆的圆心位于坐标系原点,其半径为 R_3 ,按下式计算

$$R_3 = R + 2e - a = R_1 + r_2 + 2e - a \quad (2)$$

齿顶圆方程为

$$\begin{bmatrix} x_{O, \text{head}} \\ y_{O, \text{head}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R + a \cos \phi \\ a \sin \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

齿根圆方程为

$$\begin{bmatrix} x_{O, \text{foot}} \\ y_{O, \text{foot}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R + a \cos \phi \\ a \sin \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_3 \cos \varphi \\ R_3 \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$\alpha = \frac{2\pi(j-1)}{Z_2}, \quad j = 1, 2, \dots, Z_2 \quad (5)$$

文献[3]中已经证明,式(1)和式(3)所描述的内外转子型线可满足正确的啮合关系,本文不再赘述。

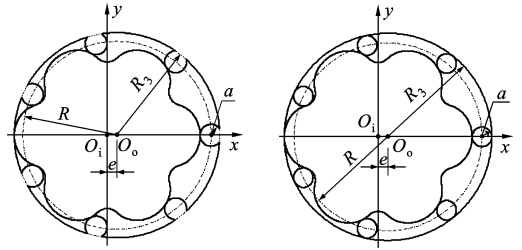
1.3 内转子型线构成的基本条件

当齿顶圆半径减小时,所对应的中心角逐渐增大,如图 1a 所示,齿顶圆也减小,当齿顶圆半径小到一定程度后,齿顶圆将和齿根圆相切,如图 1b 所示,如果再缩小,外转子型线将无法构成,故需要满足

$$R_3 - R \leq a \quad (6)$$

将式(6)带入式(2),可知型线能够构成的条件为

$$a \geq e \quad (7)$$



(a) 齿顶圆中心展角大于 π (b) 齿顶圆和齿根圆相切

图 1 外转子齿顶圆与齿根圆的关系

2 内转子型线的极值点

2.1 型线的曲率和曲率半径计算

内转子型线十分复杂,虽可根据曲率求解公式直接对式(1)进行求导,得到曲率和曲率半径,但推导过程繁琐,得到的结果十分复杂,不利于进一步分析,故本文将采用另外的方法加以推导。

本文 1.1 节已经介绍,内转子型线为短幅外摆线的内等距线,根据平面微分学理论^[4],如图 2 所示,有一条曲线 Γ ,其等距线为 Γ_a ,则等距线的方程可描述如下

$$\Gamma_a(s) = \Gamma(s) + \kappa \mathbf{N}(s) \quad (8)$$

式中: κ 是等距距离; $\mathbf{N}(s)$ 是曲线上各点的单位法向量。

根据 Frenet 定义^[4],等距曲线的曲率和曲率半径之间有如下关系

$$k_a(s) = k(s) / [1 + \kappa k(s)] \quad (9)$$

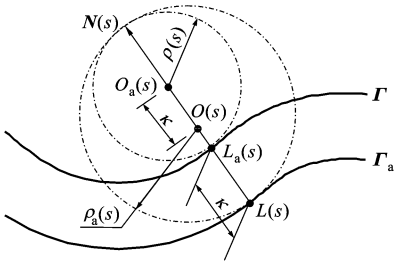


图2 2条等距线曲率和曲率半径的关系

$$\rho_a(s) = \rho(s) + \kappa \quad (10)$$

由于内转子型线的等距线为短幅外摆线,因此其数学描述比较简单,短幅外摆线的曲率半径为

$$\rho_e = \frac{[R^2 + e^2 Z_2^2 + 2eRZ_2 \cos(Z_1 t)]^{\frac{3}{2}}}{R^2 + e^2 Z_2^2 + eRZ_2(Z_2 + 1)\cos(Z_1 t)} \quad (11)$$

内转子方程是短幅外摆线的内等距线,等距距离为\$-a\$,这样根据式(11),其曲率半径和曲率为

$$\rho_i = \rho_e - a \quad (12)$$

$$k_i = k_e / (1 - ak_e) = 1/\rho_i \quad (13)$$

求解出的曲率半径若为正,则代表该点所对应的曲率圆的圆心在内转子型线所包围的区域内。

2.2 型线极值点分析

根据式(12)可知,如果短幅外摆线正值曲率半径最小值小于\$a\$,则会使内转子型线产生尖点.因此,必须先求得短幅外摆线上的一些极值点,即

$$d\rho_e/dt = 0 \quad (14)$$

将式(14)代入式(11),可得

$$\frac{eRZ_1 Z_2 \sin(Z_1 t) \vartheta}{[R^2 + e^2 Z_2^2 + 2eRZ_2 \cos(Z_1 t)]^{\frac{5}{2}}} = 0 \quad (15)$$

其中

$$\vartheta = e^2 Z_2^2 (2Z_2 - 1) - R^2 (Z_1 - 1) + eRZ_2 (Z_2 + 1) \cos(Z_1 t) \quad (16)$$

显然

$$[R^2 + e^2 Z_2^2 + 2eRZ_2 \cos(Z_1 t)]^{\frac{5}{2}} > 0 \quad (17)$$

$$eRZ_1 Z_2 > 0 \quad (18)$$

这样,式(15)可化简为

$$\vartheta \sin(Z_1 t) = 0 \quad (19)$$

要使式(19)成立,则

$$\sin(Z_1 t) = 0 \quad (20)$$

或

$$\vartheta = 0 \quad (21)$$

内转子由\$2Z_1\$段对称曲线组合而成,故可只选取其中一段,即\$t \in [0, \pi/Z_1]\$来分析,由式(20),可求得

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_3 &= \frac{\pi}{Z_1} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

但式(21)不一定成立,即可能存在

$$|\vartheta| > 0 \quad (23)$$

因为\$|\cos(Z_1 t)| \leq 1\$,那么式(21)成立的条件为

$$\frac{R^2 (Z_1 - 1) - e^2 Z_2^2 (2Z_2 - 1)}{eRZ_2 (Z_2 + 1)} > 1 \quad (24)$$

或

$$\frac{R^2 (Z_1 - 1) - e^2 Z_2^2 (2Z_2 - 1)}{eRZ_2 (Z_2 + 1)} < -1 \quad (25)$$

求解后,可得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{R}{Z_2} < e < \frac{RZ_2 - 2R}{Z_2 (2Z_2 - 1)} = e_{\lim,1} \\ e < -\frac{RZ_2 - 2R}{Z_2 (2Z_2 - 1)} \text{ 或 } e > \frac{R}{Z_2} = e_{\lim,2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

考虑到\$e\$肯定大于0,式(26)可转化为

$$\left. \begin{aligned} 0 < e < e_{\lim,1} \\ e > e_{\lim,2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

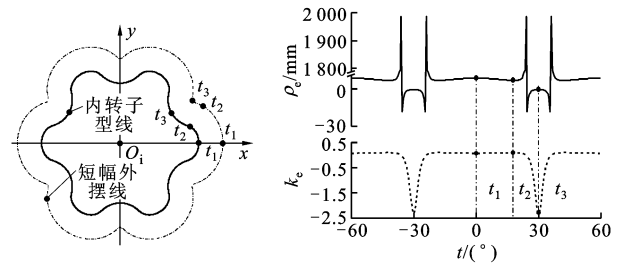
因此,若式(27)成立,则式(21)不成立,型线在\$t \in [0, \pi/Z_1]\$范围内只存在2个极值点,反之则存在3个极值点,因此分成以下3种情况讨论。

(1) \$e_{\lim,1} \leq e \leq e_{\lim,2}\$

这时式(21)成立,可求解得

$$t_2 = \arccos \left[\frac{R^2 (Z_1 - 1) - e^2 Z_2^2 (2Z_2 - 1)}{eRZ_2 (Z_2 + 1)} \right] / Z_1 \quad (28)$$

结合式(22),共包含3个极值点\$t_1, t_2\$和\$t_3\$,它们在短幅外摆线和内转子型线上的位置如图3a所示,所对应的曲率和曲率半径如图3b所示.当短幅外摆线的曲率半径为负值时,不会影响内转子的光滑性,故只需找出曲率半径为正值时的最小曲率半径.显然,最小的正值曲率半径为\$t_2\$所对应的位



(a) 极值点的位置 (b) 曲率和曲率半径与发生角\$t\$的关系

图3 第1种情况下短幅外摆线的极值点

置,其大小为

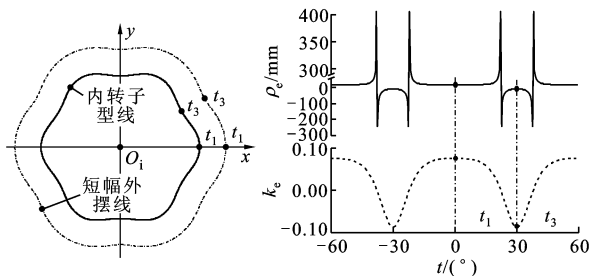
$$\rho_{e,\min+} = [27(Z_2 - 1)(R^2 - e^2 Z_2^2)]^{\frac{1}{2}} / (Z_2 + 1)^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

(2) $0 < e < e_{\lim,1}$

当 e 处于这个范围时,式(23)成立,这样只包含 2 个极值点 t_1 和 t_3 ,它们的位置如图 4a 所示,所对应的曲率和曲率半径如图 4b 所示.这时最小正值曲率半径对应的极值点为 t_1 ,其大小为

$$\rho_{e,\min+} = (R + eZ_2)^2 / (R + eZ_2^2) \quad (30)$$

即在该种情况下,内转子总是可以满足光滑条件.



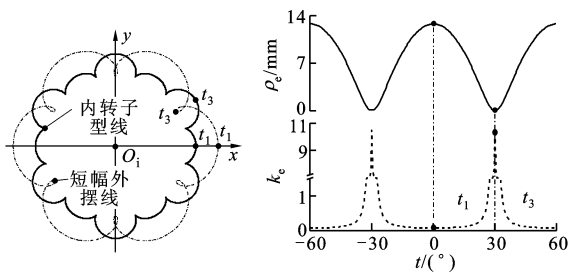
(a) 极值点的位置 (b) 曲率和曲率半径随发生角 t 的变化

图 4 第 2 种情况下短幅外摆线的极值点

(3) $e > e_{\lim,2}$

在这种情况下,式(23)也成立,也只会包含 2 个极值点 t_1 和 t_3 ,它们的位置如图 5a 所示,所对应的曲率和曲率半径如图 5b 所示.这时最小正值曲率半径对应的极值点为 t_1 ,其大小为

$$\rho_{e,\min+} = (R - eZ_2)^2 / (R - eZ_2^2) \quad (31)$$



(a) 极值点的位置 (b) 曲率和曲率半径随发生角 t 的变化

图 5 第 3 种情况下短幅外摆线的极值点

3 内转子连续性条件和计算实例

3.1 型线无过切条件

由上节可知,短幅外摆线在 3 种情况下有不同的极值点,不过在第 3 种情况下内转子型线是不连续的,必须被排除.在第 2 种情况下,结合式(7),可看出 $\rho_{e,\min+}$ 恒大于 a ,故不会出现型线交叉或不光滑现象.

在第 1 种情况下,为了保证型线光滑,要满足

$$\rho_{e,\min+} > a \quad (32)$$

将式(29)代入式(32),可得

$$\frac{[27(Z_2 - 1)(R^2 - e^2 Z_2^2)]^{\frac{1}{2}}}{(Z_2 + 1)^{\frac{3}{2}}} > a \quad (33)$$

变换式(33),并考虑到 e 必须为正值,可得

$$e < e_{\max} = \left[\frac{R^2}{Z_2^2} - \frac{a^2(Z_2 + 1)^3}{27(Z_2 - 1)Z_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

考察式(26)和(34),可见

$$e_{\max} < e_{\lim,2} \quad (35)$$

当满足

$$0 < e < \left[\frac{R^2}{Z_2^2} - \frac{a^2(Z_2 + 1)^3}{27(Z_2 - 1)Z_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

时,则内转子型线光滑无尖点

3.2 计算实例及讨论

以内外转子齿数、基圆半径、齿顶圆半径和偏心距作为独立结构参数,构造 1 台内啮合转子压缩机,分别选取不同的偏心距,计算结果如表 1 所示.

从表中可见:当 Z_1 、 Z_2 、 R_1 和 a 确定后,就可计算出 $e_{\lim,1}$ 和 $e_{\lim,2}$;当选择的偏心距 e 处于这 2 个极限偏心距之内,则需要进一步计算 $e_{\max}$,以判断所选择的 e 是否超过 $e_{\max}$;当选择的偏心距小于 $e_{\lim,1}$,则可直接判断内转子型线为光滑连续.为了验证本方法的正确性,选取与文献[1]同样的结构参数,采用该文献给出的数值方法进行偏心距最大极限值计算,得到的最大偏心距为 5.659 mm,与表 1 中 $e_{\max} = 5.66$ mm 一致,故可证明该方法推导正确.

表 1 不同偏心距下的计算实例

参数	实例 1	实例 2
内转子齿数 Z_1	6	6
外转子齿数 Z_2	7	7
基圆半径 R_1 /mm	45	45
齿顶圆半径 a /mm	12	12
偏心距 e /mm	4.5	2
$e_{\lim,1}$ /mm	2.47	2.47
$e_{\lim,2}$ /mm	6.43	6.43
最大偏心距 $e_{\max}$ /mm	5.66	
最小曲率半径 $\rho_{e,\min+}$ /mm	19.82	24.06

4 结 论

本文根据已有的研究结果建立了内外转子型线显式参数方程,和其他文献不同之处在于,内转子型线并非采用外转子角度参数进行描述,因此几何意

义明确,在研究复杂的型线问题时,可简化研究的难度.通过计算短幅外摆线的曲率和曲率半径,比较简单地得到了内转子型线上各点的曲率和曲率半径,并以短幅外摆线为参考,得到了型线上出现极值点时的发生角,将其分为3种情况加以讨论,最终得到了内转子型线无过切的条件.最后,选取了2个计算实例对本文所推导的无过切条件进行了验证.

研究表明,当采用内外转子齿数、基圆半径和齿顶圆半径作为自由变量时,通过本文推导得到的公式,可将内外转子间的偏心矩的取值限制在一定合适的范围内,在该范围所选取的偏心矩可保证内转子型线光滑连续,且所推导的公式为显式表达,无需进行复杂的数值计算或迭代.

参考文献:

[1] MIMMI G C, PENNACCHI P E. Non-undercutting

conditions in internal gears[J]. Mechanism and Machinery Theory, 2000, 35 (4): 477-490.

[2] YE Zhonghe, ZHANG Wei, HUANG Qinghai, et al. Simple explicit formulae for calculating limit dimensions to avoid undercutting in the rotor of a cycloid rotor pump [J]. Mechanism and Machinery Theory, 2006, 41(9): 405-414.

[3] 郁永章,张旭东. 一种新型全平衡高强度转子式压缩机的几何关系[J]. 西安交通大学学报, 2001, 35(11): 1193-1197.

YU Yongzhang, ZHANG Xudong. Geometry relations of a new rotary compressor[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2001, 35(11): 1193-1197.

[4] 苏步青,华宣积,忻元龙. 实用微分几何引论[M]. 北京:科学出版社,1986.

(编辑 王焕雪)